ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

დავალება № 16 (ნაწილი მეორე). ფუნქციის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილი. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები, ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია16-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

15-ა,გ,ე	15-ბ,დ,ვ	16-ა,გ,ე	16-ბ,დ,ვ	17-ბ,დ	17-ა,გ						

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

იპოვეთ მოცემული ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები

15-ა. $f(s) = 2s(s+4)^3$

ამოხსნა:
ვიპოვოთ $f(s)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული. ამისათვის ფუნქცია გავაწარმოოთ ორჯერ. პირველი რიგის წარმოებული ტოლია $f'(s) = 2(s+4)^3 + 6s(s+4)^2$. ხელმეორედ გაწარმოება იძლევა შედეგს: $f''(s) = 24(s+4)(s+2)$.
$f''(s) = 0$ განტოლების ფესვებია $s = -4$ და $s = -2$. მოვნიშნოთ ისინი რიცხვით ღერძზე და მიღებული შუალედებიდან თითოეულში დავადგინოთ $f''(s)$ -ის ნიშანი, საიდანაც ვასკვნით, რომ $f(s)$ ფუნქციის ამოზნექილობის შუალედია [-4; -2], ხოლო ჩაზნექილობის შუალედებია (-∞; -4] და [-2; +∞). $f(s)$ ფუნქციას აქვს ორი გადაღუნვის წერტილი M(-4;0) და N(-2;-32).
პასუხი: $f(s)$ ფუნქცია ამოზნექილია [-4; -2], ხოლო ჩაზნექილია (-∞; -4] და [-2; +∞) შუალედებში. გადაღუნვის წერტილებია (-4;0) და (-2;-32).

15-გ. $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

ამოხსნა:

ვიპოვოთ $g''(x)$.

$g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. $g''(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

ადვილი დასანახია, რომ $g''(x)=0$ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს და ასევე $g''(x)>0$ უტოლობის ამონახსნია $x\in R$.

პასუხი: ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია (-∞; +∞) შუალედში, გადაღუნვის წერტილი არ აქვს.

15-ე. $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$

ამოხსნა: გავაწარმოოთ ფუნქცია ორჯერ, გვექნება $f'(x)=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, $f''(x)=\frac{6x(x+1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^4}$

შევნიშნოთ, რომ $f''(x)=0$ განტოლების ფესვებია $x=0$ და $x=-1$. დავადგინოთ $f''(x)$ ფუნქციის ნიშნები შესაბამის შუალედებში. შედეგად მივიღებთ, რომ $f''(x)$ დადებითია (-∞; -1) და (0; +∞) შუალედებში, ხოლო უარყოფითია როცა $x\in(-1;0)$.

პასუხი: ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია (-∞; -1] და [0; +∞) შუალედებში, ხოლო ამოზნექილია [-1;0] შუალედში. გადაღუნვის წერტილებია (-1; 1) და (0; 1).

იპოვეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკების ასიმპტოტები

16-ა. $f(x)=x-\frac{7}{x}$

ამოხსნა: $x=0$ წრფე არის ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმტოტი, რადგანაც $\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty$ და $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

დახრილი ასიმტოტის მოსაძებნად გამოვთვალოთ $y=kx+b$ წრფის k და b პარამეტრები.

$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{7}{x}}{x}=1$, $b=\lim_{x\to\infty}(x-\frac{7}{x}-x)=0$.

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტია $y=x$ წრფე.

პასუხი : ვერტიკალური ასიმპტოტია $x=0$, ხოლო დახრილი $y=x$ წრფე.

16-გ. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

ამოხსნა: მოცემულ ფუნქციას ვერტიკალური ასიმპტოტი არა აქვს. დახრილი ასიმპტოტის საპოვნელად განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

როცა $x\to+\infty$, $k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$.

როცა $x\to-\infty$, მაშინ $k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=-1$, $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}=0$.

ე.ი. როცა $x\to+\infty$ დახრილი ასიმპტოტია $y=x$, ხოლო როცა $x\to-\infty$, $y=-x$ წრფე.

პასუხი: ფუნქციის გრაფიკს ვერტიკალური ასიმპტოტი არ აქვს, დახრილი ასიმპტოტებია $y=x$ და $y=-x$ წრფეები.

16-ე. $f(x)=\frac{2x^3+1}{x^2-4x}$

ამოხსნა: ჩვენი ფუნქციის სახეა $f(x)=\frac{2x^3+1}{x(x-4)}$. გრაფიკის ვერტიკალურ ასიმპტოტებს წარმოადგენენ $x=0$ და $x=4$ წრფეები. ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტი.

$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{x(x^2-4x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{x^3-4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{4}{x}}=2$,

$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+1}{x^2-4x} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1-2x^3+8x^2}{x^2-4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+8x^2}{x^2-4x} = 8$.

პასუხი: ვერტიკალური ასიმპტოტებია $x = 0$ და $x = 4$, ხოლო დახრილი ასიმპტოტია $y = 2x + 8$.

გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები.

17-ბ. $f(x) = \frac{x^2+2x-4}{x^2}$.

ამოხსნა:

ნაბიჯი 1. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

ნაბიჯი 2. რადგანაც $x = 0$ წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის, ამიტომ გრაფიკი არ კვეთს y ღერძს, ხოლო x ღერძს გადაკვეთს (-1-√5; 0) და (-1+√5; 0) წერტილებში.

ნაბიჯი 3. ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 0$ წრფე (y ღერძი), რადგანაც $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

ვინაიდან $k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-4}{x^3} = 0$ და $b = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-4}{x^2} = 1$, ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y = 1$ წრფე.

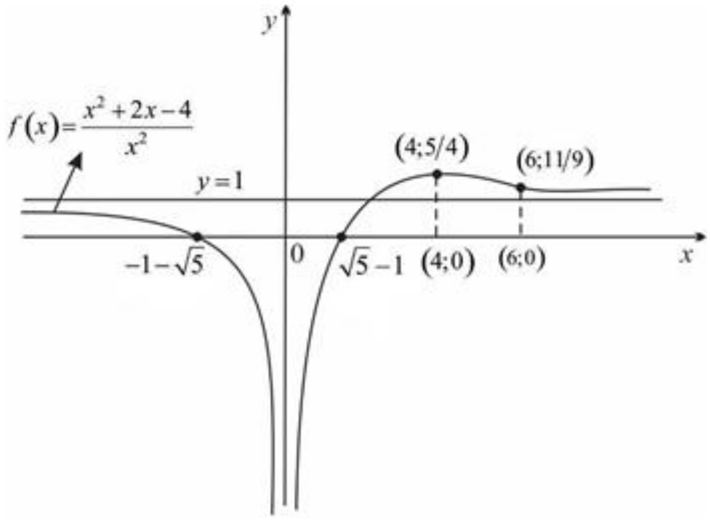
ნაბიჯი 4. მონოტონურობის შუალედების დასადგენად გავაწარმოოთ $f(x)$ ფუნქცია . მივიღებთ, $f'(x) = \frac{(2x+2)x^2-2x(x^2+2x-4)}{x^4} = \frac{-2x+8}{x^3}$.

ვინაიდან $f'(4) = 0$, ამიტომ $x = 4$ არის ფუნქციის კრიტიკული წერტილი. შევნიშნოთ, რომ $f'(0)$ არ არსებობს, მაგრამ $x = 0$ არ წარმოადგენს კრიტიკულ წერტილს, რადგანაც ფუნქცია 0-ში განსაზღვრული არაა. ფუნქციის წარმოებულის სახიდან გამომდინარე ვასკვნით, რომ წარმოებული დადებითია (0;4) შუალედში , ხოლო უარყოფითია (-∞; 0) და (4; +∞) შუალედში. ე.ი. ფუნქცია ზრდადია (0;4], ხოლო კლებადია (-∞;0) და [4; +∞) შუალედებში.

ნაბიჯი 5. ზევით მოყვანილი მსჯელობებიდან გამომდინარე $x = 4$ არის ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი და ფუნქციის მაქსიმუმი $f(4) = \frac{5}{4}$.

ნაბიჯი 6. ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის შუალედების დასადგენად გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული. $f''(x) = \frac{4(x-6)}{x^4}$. ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ $f''(x)$ ფუნქციის ნიშნები $x < 0$, $0 < x < 6$ და $x > 6$ შუალედებში. შედეგად ვასკვნით , რომ გრაფიკი ამოზნექილია (-∞;0) და (0;6] შუალედებში, ხოლო [6; +∞) შუალედში კი ჩაზნექილია. $x = 6$ წერტილზე ამოზნექილობა იცვლება ჩაზნექილობით, ამიტომ (6; $f(6)$) წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს.

ნაბიჯი 7. 1-6 ნაბიჯების გათვალისწინებით ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე:



17-დ. $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

ამოხსნა:

ნაბიჯი 1 და 2. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

რადგანაც 0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის, ამიტომ გრაფიკი არ კვეთს y ღერძს, ხოლო x ღერძს გადაკვეთს (-1;0) წერტილში.

ნაბიჯი 3. ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 0$ წრფე (y ღერძი), რადგანაც $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

ვინაიდან $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^3} = 0$?? $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$, ამიტომ $y = 0$ წრფე (x ღერძი) წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალურ ასიმპტოტს.

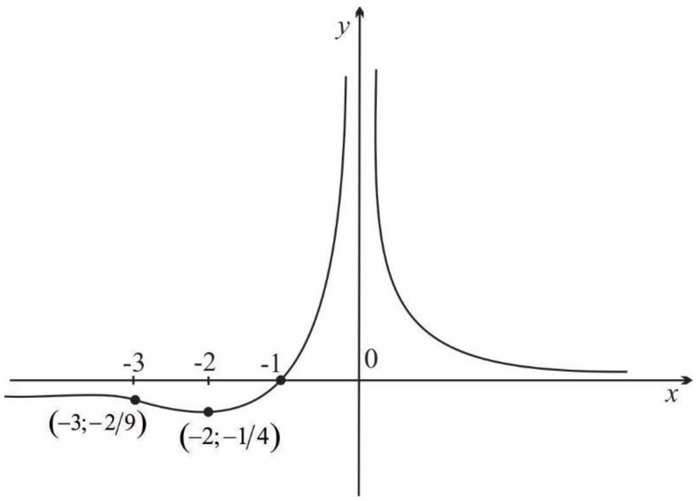
ნაბიჯი 4. ვინაიდან $f'(x) = -\frac{x+2}{x^3}$ და $f'(-2) = 0$, ამიტომ $x = -2$ არის ფუნქციის კრიტიკული წერტილი. რაც შეეხება $x = 0$ წერტილს, ის არ იქნება კრიტიკული წერტილი, რადგან 0 არ ეკუთვნის განსაზღვრის არეს. ფუნქციის წარმოებულის ნიშანმუდმივობის შუალედების განსაზღვრის შემდეგ ვასკვნით, რომ ფუნქცია კლებადია (-∞; -2] და (0;+∞) შუალედებში , ხოლო [-2;0) -ზე კი ზრდადი.

ნაბიჯი 5. წინა ნაბიჯების გათვალისწინებით მივდივართ დასკვნამდე, რომ $x = -2$ წერტილში ფუნქცია აღწევს ლოკალურ მინიმუმს

და $f(-2) = -\frac{1}{4}$. შესაბამისად, $\left(-2; -\frac{1}{4}\right)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილია.

ნაბიჯი 6. ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის შუალედების დასადგენად ფუნქცია გავაწარმოოთ ორჯერ, მივიღებთ $f''(x) = \frac{2(x+3)}{x^4}$. ვინაიდან $f''(-3) = 0$, ხოლო $f''(0)$ არ არსებობს, ამიტომ (-∞;-3) ; (-3;0) და (0;+∞) შუალედებში ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშნების დადგენის შედეგად ვასკვნით, რომ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია (-∞;-3]- ზე , ხოლო [-3;0) და (0;+∞) შუალედებზე კი ჩაზნექილი. მაშასადამე (-3; $f(-3)$) წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს.

ნაბიჯი 7. მოყვანილი მსჯელობების გათვალისწინებით ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე:



y
x
0
-3
-2
-1
(−3;−2/9)
(−2;−1/4)